

ROYAUME DU MAROC

مكتب التكوين المهني وإنعاش الشغل

Office de la Formation Professionnelle et de la Promotion du Travail  
DIRECTION RECHERCHE ET INGENIERIE DE FORMATION

OFPPT

RESUME THEORIQUE  
&  
GUIDE DE TRAVAUX PRATIQUES

MODULE 3 NOTIONS DE MATHÉMATIQUES  
APPLIQUÉES À L'INFORMATIQUE

SECTEUR : NTIC

SPECIALITE : TECHNIQUES DE RESEAUX INFORMATIQUES (TRI)

NIVEAU : TECHNICIEN SPECIALISE

*DOCUMENT ELABORE PAR :*

*NOM ET PRENOM :*

*EFP :*

*DR :*

*MORCHID OMAR IMAM*

*CFMOTI*

*DRGC*



f	Répartition de zones dans un tableau de Karnaugh	29
g	Lecture d'une fonction dans un tableau de Karnaugh	30
h	Regroupement de cases dans un tableau de Karnaugh	30
i	Minimisation d'une fonction dans un tableau de Karnaugh	32
j	Restes	12
C.	Unité de mesure de l'information et ses multiples	33
D.	Les codes binaires	33
1.	Alphabets	33
2.	Code binaire pur	33
3.	Code binaire réfléchi (code Gray)	33
4.	Construction du code Gray	33
5.	Les codes de caractères	34
6.	Le code ASCII	34
E.	Combinatoire (16-nombres)	35
1.	Notation factorielle	35
a.	Definition	35
b.	Propriétés	35
2.	Arrangements de r objets parmi n	35
a.	Definition	36
b.	Antécédents	36
c.	Théorème	36
3.	Combinaisons de r objets parmi n	36
a.	Definition	36
F.	La probabilité	37
1.	Introduction	37
2.	UNIVERS DES ÉVÉNEMENTS	37
a.	Definitions	37
b.	AXIOMES	38
3.	PROBABILITÉS CONDITIONNELLES	40
0.	Résoudre des problèmes de probabilité et de statistique	43
L.	Notion de variables aléatoires	43
1.	Notion de variables quantitatives	44
3.	Représentation des variables qualitatives et quantitatives	44
4.	(à partir des paramètres de tendance)	45
a.	Paramètre de centralité	45
b.	Paramètre de dispersion	45
•	RAVAUX, BERTGES	41.3

PAOCILILE 3 NOTIONS DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES À L'INFORMATIQUE

Code **TRI-03**

Mirka : 60 heures

ECTIF OPERATIONNEL

COMPÉTENCE

Appliquer des notions de base en mathématiques et statistiques en Informatique PRESENTATION

Ce module de compétence générale s'inscrit dans la première année du programme d'études et constitue un préalable pour l'enseignement des modules "Techniques de programmation structurée" et "Installation d'un Poste informatique".

**DESCRIPTION**

L'objectif de ce module est l'étude des principaux concepts mathématiques utilisés en informatique, la résolution de problèmes et l'analyse de situations concrètes. L'aide de méthodes statistiques tout en faisant preuve d'esprit critique dans le choix de ces dernières et l'interprétation des résultats obtenus.



### CONTENU DE L'ENSEIGNEMENT

#### STRATÉGIES D'APPRENTISSAGE

Présentation des exposés de concepts théoriques sur la théorie (à l'initiative de l'étudiant) amenant le stagiaire à résoudre des problèmes appliqués en informatique et analyser des situations concrètes.  
 Ensuite, des exercices seront proposés aux stagiaires pour consolider les concepts abordés.  
 Pour chaque élément de compétence, des exercices porteront sur des situations réelles.  
 Enfin, les travaux reviennent à l'aide d'outils informatiques (tableur) servant en lien avec des notions vues dans les autres modules.

#### ACTIVITÉS D'APPRENTISSAGE

- Représenter des données sur l'ordinateur et effectuer des opérations arithmétiques et logiques dans différents types de représentation interne.
- Organiser et traiter de l'information.
- Résoudre des problèmes de dénombrement, de probabilité et de statistique.

#### EVALUATION

- Individuellement
- Travaux effectués à partir de situations proches du domaine de l'informatique. - des consignes du brmatouf.
- Travaux effectués
  - d'une station de travail et sur tableur;
  - des manuels de référence techniques appropriés

#### MATÉRIEL ET ÉQUIPEMENT

#### Matériel :

- Notes de cours
- Tableurs

#### Équipement

- Un poste informatique

#### REFERENCES

CONTEXTE D'ENSEIGNEMENT

PRECISIONS Et PREALABLES

ELEMENTS DE CONTENU

- |   |  |
|---|--|
| <p>1. Définir un système de numération.</p> <p>2. Définir les systèmes binaire, octal et hexadécimal.</p> <p>3. Donner l'unité de mesure de l'information et ses multiples.</p> <p>4. Définir les différents codes binaires (binaire naturel, ASCII ...).</p> <p>A. Effectuer des traitements sur des données numériques.</p> <p>B. Maîtriser <b>des opérations logiques</b>.</p> <p>C. Résoudre des problèmes de combinatoire.</p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Définition de base d'un système de numération et rang d'un chiffre,             <ul style="list-style-type: none"> <li>• Représentation de nombres sous forme polynomiale,</li> </ul> </li> <li>• Représentation d'un nombre dans la base décimale ou hexadécimale,</li> <li>• Définition de l'unité de mesure de l'information en informatique (chiffre binaire ou bit).             <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Définition d'un mot binaire (octet).</li> </ul> </li> <li>• Calcul des multiples de l'octet (Ko, Mo, Go ...) dans le système binaire (base 2).</li> <li>• Codage d'un nombre décimal en <a href="#">binaire</a> naturel,</li> <li>• Codage d'un nombre décimal et binaire en Gray et vice versa.             <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Codage d'un nombre décimal en BCD et vice versa.</li> </ul> </li> <li>• Définition du code ASCII,</li> <li>• Convertir un nombre en différents systèmes de numération.             <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Calcul des opérations (+, -, ×, division) dans le système binaire naturel.</li> </ul> </li> <li>• Définition de l'organisation de la mémoire (mot mémoire, adressage).</li> <li>• Différents types de représentation de nombres sur l'ordinateur : signe et grandeur, complément à 1, complément à 2, par excès, nombres réels, notion de virgule flottante.</li> <li>■ <b>Algèbre de Boole</b> et les trois opérations logiques de base : Négation (NON), Intersection (ET) et union (OU)             <ul style="list-style-type: none"> <li>• Lois fondamentales de l'algèbre de Boole.</li> <li>• Variables booléennes et valeurs de vérité.</li> <li>• Fonctions booléennes, tables de vérité et simplification des fonctions.</li> </ul> </li> </ul> <p>Notation factorielle et propriétés.</p> |
|---|--|

<p>5. Définir le concept de probabilité.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Déterminer le nombre de sous-ensembles d'un ensemble et objets distincts</li> <li>• Formule de la somme des combinaisons possibles,</li> <li>■ Définir la notion de probabilité.</li> <li>■ Donner les éléments d'un échantillon.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■</li> </ul>
<p> Définir la notion de variable de type de variable statistique.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifier le type de variable statistique associée à un caractère donné,</li> </ul>	
<p>D. Résoudre des problèmes de probabilité et statistique.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Notion de variables qualitatives.</li> <li>• Notion de variables quantitatives.</li> <li>■</li> <li>• Représentation des variables qualitatives et quantitatives.</li> <li>• Calcul des paramètres de tendance.</li> <li>• Interprétation des paramètres de tendance.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•</li> </ul>



A. Systèmes de numération

I- Introduction

### 1. Aperçu historique

L'arithmétique est l'étude des nombres entiers et des opérations sur ces nombres. La notion de nombres entiers nous est naturelle et leur écriture usuelle (0, 1, 2, 2006, ...) est familière. Cependant, il a fallu des siècles pour que se dégagent ces concepts.

L'origine des **nombres entiers** est lointaine. Par exemple, les bergers de Mésopotamie utilisaient des cailloux (*calothés* en latin) pour faire rente le soir *autant* de moutons qu'ils en avaient fait sortir le matin. Cailloux d'une part et moutons d'autre part. **Il y avait** des collections d'objets différents ayant autant d'éléments

Ainsi, au fil du temps, partir de collections concrètes d'objets pour définir le même caractère des ensembles, le concept de nombres entiers.

Ensuite, progressivement, ces entités sont devenues des objets mathématiques abstraits, indépendants des objets concrets.

On a donné des **noms** à ces nombres (A noter cependant qu'il y a, par exemple, les Aborigènes australiens n'ont pas de *nom de nombre*).

Test posé aussi Le problème de la notation des entiers naturels. Ils sont en nombre fini : comment les écrire avec un nombre fini de signes (appelés chiffres) ? C'est le problème de la **numération**.

**Viendront aussi** les opérations élémentaires sur les nombres.

Cependant, une véritable arithmétique théorique tardive veut dire nombre à grec ancien, où les nombres sont conçus comme des objets mathématiques abstraits, indépendants de leur représentation écrite et des objets concrets ; ne s'est constituée que progressivement ; chez les Babyloniens (17<sup>ème</sup> siècle av-JC), puis dans la mathématique grecque (nombres figurés, suites chez les pythagoriciens, théorie du MCD), nombres premiers et leur infinité (à partir de 500 ans Les mathématiciens arabes du *moyen âge* **ont** repris et développé presque tous les problèmes arithmétiques des grecs. voir par exemple *Ma'arif*, *fd des sciences* Paaty- 19.27).

Cast de l'Inde, que nous viennent les notations actuelles des nombres, transmises par les arabes ; et, semble-t-il, le zéro (le mot français chiffre est une déformation (In **MOE** arabe voir **do** voir 716m) :

On attribue à Brahmaguṇya, au 7<sup>ème</sup> siècle, l'invention du zéro - en fait déjà à l'état latent dans les mathématiques indiennes de l'époque - He a utilisé d'un système décimal positionnel que l'Occident a adopté, transmis par les Arabes (voir *Ma'arif*) lors de leurs invasions en Asie

(sud de l'Espagne ). Brahmagupta enonce la règle des signes relative à 1  
fratiphatic. (gouvernement.informatica.com).

2\_ Exemples de systèmes de numération

a- La numération Égyptienne

symbole	1	10	100	1000	10000	100000	1000000
03100e\$ probesaus armbdca	as Atom	un aune du panne- m un caddon	un roule-Ru dr pwrin. {in lac gli:We	end IIIur Eh: in44	fist reaeln# 01 1 16jparmm . indird	um Liati	un dick; aguricuite Guppurink te ziuJ as million
Valetul	ua	diy.	cent	•	•	•	•

• Principe :

Le nombre correspondant est la somme des nombres représentés par les symboles. c'est une numération de type

b- L'écriture Babylonienne

• Pour les nombres de 1 à 59 c'est une écriture additive qui n'utilise que deux symboles un "clan" pour l'unité et un chevron " pour la dizaine..



• Pour les nombres de 60 à 595 l'écriture se fait par paquets " séparés par un espace. Le premier paquet compte les unités, le second paquet compte le nombre de dizaines, le troisième le nombre de centaines au carré ". Pour chaque paquet le nombre, est compris entre 1 et 59,

• Par exemple

Numerotation babylonienne		67 = 2*10 + 7	67 = 1*100 + 1*10 + 7
Numerotation usuelle			

Remarque ;

D'autres systèmes de numération ont été utilisés jadis. Voici plus anciens au plus récent

- Le système phalécien
- Le système grec

OPPTIDRIF

		9
--	--	---

- Le systeme bobreu
- Le systeme romain
- Le systeme des mayas
- Le systeme des arabes de Bagdad

## II Des systemes positionnels

### 1. QU'est-ce qu'un systeme de numeration ?

Sur le plan de la *repr6e, F3tation* des nombres, on s'est vite rendu compte de la difficult6

- D'associer a chaque nombre un symbole : 0 1 2 ... etc. du a l'inverse, ce r614-6;er uo signs unique **pour** représenter un nombre I II III IIII .....
  - De leur donner un nom : Ces obstacles ont obligé les diverses civilisations d'autrefois a combiner les nombres et les symboles pour désigner des nombres **Supérieurs**

Exemple chez 14 Romains:  $XXIV = X + XF(VI) = 24$

### Règle :

un petit chiffre précédant un plus grand que lui est soustrait en priorité, ensuite tout chiffre est additionné au **Système**

### Définition :

*...vpsrAfin d n cl ndy ail on esti un ensenthk de symbany i regles Ter in-Want  
d rierre et de no miner les rtombres*

Pour des raisons économiques de noms et de symboles, les systèmes les plus efficaces sont ceux qui reposent sur des **REGROUPEMENTS** en un certain nombre d'éléments, toujours le même. Ce nombre est appelé **BASE** de numération.

Les chiffres qui indiquent le nombre de différents groupements obtenus sont placés les uns après les autres dans un ordre bien précis

Ce mode de regroupement où chaque chiffre prend une valeur différente selon la place qu'il occupe s'appelle **SYSTEME DE NUMERATION DE POSITION**. Tous les systèmes de numération ne se valent pas. Il y en a de plus pratiques et de moins pratiques.

## 2\_ Principe de la base

La base est le nombre qui sert à définir un système de numération. La base du système décimal est dix (il faut alors que celle du système octal est huit, quelque soit la base numérique employée, elle suit la relation suivante



**e. La basa B**

D'une maniere generale, on appelle une base B tout ensemble compos 4e B elements partant, de 0 jusx.iu<sup>1</sup> B-1

RefilGrgi le :

1. l' inconvenient d' ix petite base, e'en 1.111 trs grand nombrc de regroupcmnts, ce qui **simpletle** le s...rsteme mail alourdit reeriture.

**Par** exemple, **1 1 100101 1 01 1 1** represents en base deux **re.** rsombre 7351. Par centre,, une gum& base nkoessite wi grand •nombre de syrnolcs (trente en base tentc). La base dix l'a probabiemerrt cmporie en raison du nombrc dr doi Os des deux mains I

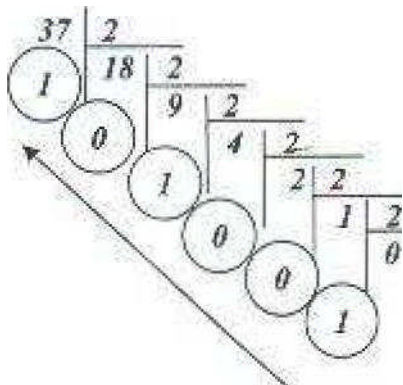
**III L'arthe-** de l' information et ses multiples ;

Passage de la base ilkirrial a une base quelwrique

Le passage de in base decimate. viers n'importe laquelle base s'efleciue par la division successive de nombre par le numero de la base correspondante\_ Le resultat se lit dans le sens inverse m-6 de La division.

Dray\*\*

Conveillir binaire le ncrnibra decimal suivant 37 :



Sens de feet urz du resultat

**Filtatement lresulted est 07)2 . = 0191910-02**

La fame methods est suivie gaeique snit la base de destination, it !;uffira de changer le d6nominateur par l'indice de la base a savoir 8 pour in base octal et. 16 pour l'hexadecimal.



V- Posage d'une base quelconque vers la base decimale

Le passage d'une base quelconque vers la base decimale se fait en traduisant la combinaison de nombre dans la base equivalente,

Convertir en decimal le nombre hexadecimal suivant A21 :

$$\begin{aligned} f_{AZT_{0116}} &= A \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^0 = 10 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^0 \\ &= 2560 + 32 + 1 \\ &= (2593)_{16} \end{aligned}$$

VI- Passage de la base hexadecimale vers une base quelconque

1, Passage de la base binaire vers le decimal :

Le passage de la base binaire vers la base decimal se fait en traduisant la combinaison de nombre dans la base equivalente

Exemple :

Convertir en decimal le nombre binaire suivant 1001

$$(1001)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 0 + 0 + 1 = 9_{10}$$

Passage de la base binaire vers

Comme il y a un rapport de puissance entre la base binaire et octal ( $8=2^3$ ), il suffit de coder chaque nombre octal sur trois bits pour passer en binaire.

:

Convertir en octal le nombre binaire suivant 101001 ;

$$(101001)_2 = (191)_8$$

7

3, Passage de la base binaire vers l'octal;

Comme il y a un rapport de puissance entre la base binaire et l'hexadecimale ( $16=2^4$ ), il suffit de coder chaque nombre octal sur quatre bits pour passer en binaire,

Exemple

Convertir en hexadecimal le nombre binaire suivant 10110011

a  $(1001)_2 \text{ Lily } \frac{1001}{1001} = (B3)_{16}$   
**B 3**

VII- L'arithmétique binaire

Les opérations arithmétiques binaires consistent de la même manière qu'en système décimal

1, L'addition binaire

Calculer  $10011 + 10100$

$$\begin{array}{r} 10011 \\ + 10100 \\ \hline 100111 \end{array}$$

2\_ L'addition binaire

Calculer  $111 + 101$

$$\begin{array}{r} \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111 \\ + 101 \\ \hline 10011 \end{array}$$

3. 1.a. soustraction

Calculer  $1101 - 1001$  :

$$\begin{array}{r} 1011 \\ - 1001 \\ \hline 0010 \end{array}$$

4, La division

Calculer  $11000 / 110$

$$\begin{array}{r} 11000 \quad \underline{110} \\ \underline{110} \quad 100 \\ 0000 \\ \underline{0000} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 00000 \\ \underline{00000} \\ 0 \end{array}$$

Il résulte  $11000 / 110 = 100$





Représentation des nombres signés

1. Par la valeur absolue et le signe

C'est naturellement la première représentation qui vient à l'esprit. Il suffit d'affecter un bit pour le signe et attribuer par convention la valeur 0 au signe + et la valeur 1 au signe -

Ainsi le nombre +32 sera dans le système binaire :

$$\begin{array}{l|l} \text{signe} & \underline{10000} \\ \hline & \text{nombre} \end{array}$$

Et le nombre -12 ;

$$\begin{array}{|l} \hline \underline{10000} \\ \hline \text{signe} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \underline{1000} \\ \hline \text{nombre} \end{array}$$

2. Représentation des nombres signés dans le code du complément restreint

Nous allons d'abord définir ce qu'est le complément restreint. Pour cela il faut tenir compte du format de donnée et de la base dans laquelle elle est exprimée.

Exemples

Suit l'illustration,  $(4-53)_{10}$  ; son format est de 3 octets et la base utilisée est 10. La valeur maximale que l'on peut exprimer dans ce format est : La différence qui existe entre cette valeur maximale et 453 s'appelle le complément restreint

$$\begin{array}{r} 999 \\ - 453 \\ \hline 546 \end{array}$$

On le nomme aussi *complément restreint* car la base utilisée est 10. Cette notion de complément restreint se retrouve avec n'importe quelle base utilisée et plus particulièrement en binaire

Le complément restreint de  $(1001)_2$  :

$$\begin{array}{r} 1111 \\ - 1001 \\ \hline 0110 \end{array}$$

Le complément restreint de  $(1001)_2$  :

**FFFF**  
**- FEPA6**  
**CF57**

Si nous reprenons l'exemple du binaire, il n'est même pas nécessaire d'exécuter une opération de soustraction pour obtenir le complément restreint on s'aperçoit simplement de transformer les 1 en 0 et vice versa pour l'obtenir.

(100110)<sub>2</sub> a pour complément restreint : **011001**, Certaines machines utilisent ce code **pour la représentation des nombres signés**. Il est alors appelé code du complément à 1.

Ainsi le nombre -25 sera représenté de la manière suivante

0111001 1  
-----  
Valeur

Et -25 ;

1 001 0
-----
sine CR de 25

*CR Complément Restreint*

3. Représentation des nombres signés dans le code du complément vrai

Comme pour le complément restreint, nous allons définir ce qu'est le complément vrai d'un nombre. Le complément vrai d'un nombre est la valeur qu'il faut ajouter au nombre pour obtenir la **valeur maximale + 1** que l'on peut exprimer (en tenant compte du format et de la base utilisée).

Exemples

Calcul du complément vrai de (451)<sub>10</sub>

Valeur maximale => 999.

**Valeur maximale + 1 = 1 000**

Complément vrai

1000  
-  
-----  
547

Calcul du complément vrai de (A5)<sub>16</sub>

Valeur maximale => FFF

**Valeur maximale + 1 = 1000**

**Complément vrai**

$$\begin{array}{r} 1000 \\ - 8AF \\ \hline 1751116 \end{array}$$

On peut aussi obtenir le complément d'un nombre en calculant d'abord son complément restreint et en ajoutant ensuite 1.

Exemples :

$$\begin{array}{r} 999 \\ - 453 \\ \hline 546 \\ + 1 \\ \hline 547 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{complément restreint} \\ \text{complément } W31 \end{array}$$

exemple en binaire

$$\begin{array}{r} 1111 \\ - 1001 \\ \hline 0110 \\ + 1 \\ \hline 0111 \end{array} \Rightarrow \text{complément restreint} + 1 = \text{complément } W31$$

Restons en binaire (base 2) et appliquons une autre méthode pour traduire un nombre en complément restreint (le complément restreint est également appelé complément à 2)

On part du bit de poids 16 plus faible (bit de droite)

- > si c'est un zéro, on copie 0 jusqu'au premier 1 rencontré,
- si c'est un "1", on garde ce premier 1.

Ensuite on inverse tous les bits 0 jusqu'au premier 1 rencontré à partir de [à droite].

NB: Attention si le bit le plus à droite est un 1, c'est aussi le premier 1 rencontré.

$$(42)_{10} = (101010)_2 \Rightarrow \text{le bit le plus à droite est un 0}$$

--> 0 on conserve le zéro.

Le premier 1 rencontré est conservé

0 > 1 inversion des bits après le premier 1 rencontré

1 => 0

1 => 0

1 0

Le nombre  $(42)_{10} = (101010)_2$  s'écrit en complément restreint : 010110

En utilisant la méthode du complément restreint + 1

Valeur de départ

101010 (42)<sub>3,0</sub>

Calcul 7: tirrriplnrent restreint => 015101 on ',flyers@ tcs les Us

4 \_\_\_\_\_ analoore 1<sup>1</sup>

SoltLi complement

=> mom

Exemple autre

9<sub>11</sub> (11 1011)<sub>2</sub> => le bit le plus a droite est un 1

1 => 1 premier 1 rencontre est conserve

1 => 0 inversion des bits apres le premier 1 rencontre

0 => 1

1

1 ==> 0

..> 0

Le nombre (59)111 = (111011)<sub>2</sub> seerit en complement vrai : 000101

En utilisant la methode du complement. restreint 1

valeur 111011 (9)<sub>10</sub>

Ca; cut Corn plerp ent rearent => 00010 an live: se taus les bits  
1 on apoute 1

Solt ur. corn\*rierd vrsii GC0101

Complement vrai = complament restreint + 1

X- En resumer pour l'arithmetique binaire

Longue l'on veut représenter un nombre avec sm1 sire (nombrc signs) la solution la plus simple consist' a raj outer um-hit sur la gauche de la valear absolue de fate norribre. Par convention ce bit sera a 0 pour représenter un nombre positif el. a 1 pour repre5akr un nombrc negatil.

0 1 1 0 signifie + 110 > (+ fo)LO

1 1 1 0 signifig - 110' r'....> 6)10

Ce s3.sthme ingressant par s1 simplicitO a pour inconvenient de presenter deux ZEIOS.

0000 + 0

1000 -0

Pour faciliter le travail des umchinf's informatiques et pour des circuits 6:c-ctrooiques simplifikis on repre..sente un nombre si0.6 en complement a 1 (complement rostreint) ou el complarncrit a 2 (4,10Trtplrnerit vrai = .cempknaent resirciot +1). La representation en complement a 2 (la plus repandu) pour avantage de no presenter gem! .sit Le hit le plus a gauche sera mpresentatif du signs

pour un nombre positif  
I pour un nombre négatif

Le tableau suivant donne un aperçu des différentes représentations pour un nombre compris entre -128 et +127.

**XI - Représentation des nombres signés ; Exemple sur un octet**

	SI valeur absolue	SI, complément à 2	SI, complément à 2
1 1 1 1	- 127	0	1
1 1 1 1 0	- 126	1	2
1 1 1 0 1	- 125	2	3
1 0 0 0 0 1	- 1	126	127
1 0 0 0 0 0	- 0	-	- 128
1 1 1 1 1 1	+ 127	127	127
0 1 1 1 1 1	+ 126	126	- 126
0 0 0 0 0 0	0	0	0
0 0 0 0 0 0	0	0	0

**Algèbre de Boole et Combinatoire**

**I. George Boole.**

George Boole, mathématicien, logicien et un petit philosophe est né le 2 novembre 1815 à Lincoln, dans le Lincolnshire (Angleterre). Il est le fondateur de la logique moderne. En 1854 il a repris la loi de Leibniz avec succès : il a inventé un langage mathématique et symbolique.

Le but est de traduire des idées et des concepts en équations, pour appliquer certaines lois et retrouver le résultat en termes logiques. Pour cela, il crée une algèbre binaire n'acceptant que deux valeurs numériques ; 0 et 1. L'algèbre booléenne ou algèbre de BOOLE a de nombreuses applications théoriques de Boole, trouvant des applications primordiales dans des domaines aussi divers que les systèmes informatiques, les circuits électriques et téléphoniques, l'automatisme,

Variable logique :

La variable logique est une grandeur qui peut prendre 2 valeurs distinctes habituellement 0 ou 1. Cette variable binaire se note par une lettre en algèbre.

Physiquement, mr.Itc.. **variable** **pew** correspondre a Fun des dispositith citEs ci-dtssno dent [es 2  
**4:CaCS repr6Serftnt** les 2 valeurs possib[e que peut, prendre cutw variable.Dtune facon 06n6ralc,  
ces 2.. is sont reperilis H Gt L ci en attribue

- a Mat H (hi el) la **valeur 1**
- a HIML yam<sup>-</sup> 0

On. trouvera parfois ectte notation du zero ; 0 pa Ur 6Y **iter coausion avec la. Icttre 0.** Lai  
variable lairilaire est mini apNlee variable booleenne.

### 3\_ Fonctions Togiclues de base

Urie forketion log ique. ea le resultat de Ia combinaison Ocigique oarnbiratoir) &line DU  
p[usiutirs vaiiables logiques reiee .entre elles par des op6rations motbkmaique\$  
BOOLEENNES bi n cle-finies valmr.r6sultarac: plc cetlt forictipo depetid de la vaEeur des  
xrvariables logiques, **mais de toiae** fawn cette risulrarite ne petit 2tre que 0 of 1. Une tbnction  
logique pnsse:de clone tuie on des variables logiques dicntrde et **une variable bagi de sanie.**  
**Cette fonction logique se note par iinc lcItre corn** en dgebre.

a. .E'maetion GUI :

Cette fonction est obtenuc kLV00 1.1ltr. Snic variable, LE' vateurcle la fcmction et tokliours  
identio Lig a la valeur d w **la variable..**

**Naas rderivons X= a**

■ Table de erite:

a	X
0	0
1	1

■ AllWierttle 5.pilif,Orisation Symbolisation act-wale :



• **Forme eanorku.e :**

$$.X =$$

I., **Font-lion NON :**

La fonction NON est obtenue avec une seule variable. La valeur de la fonction est toujours la valeur inverse (complémentaire) de celle de la variable.

Nous écrirons :  $X = \bar{a}$  et nous l'écrirons 'non a'.

Cette fonction est aussi appelée

- Fonction d'inversion,
- Fonction de complémentarité.

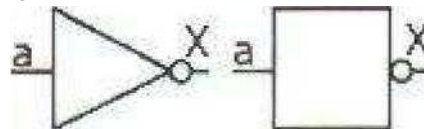
Nous disons que la valeur  $a$  est sa valeur complémentaire de  $a$  et  $x$  la valeur complémentaire

de  $x$ .

- Table de vérité

a	X
0	1
1	0

- Schéma de réalisation



- Forme canonique :

=

Fonction OU (QM)

On obtient la fonction OU avec un minimum de deux variables. La fonction  $X$  prend la valeur 1 quand l'une ou les 2 variables ont la valeur 1. Nous l'écrivons  $X = a + b$  --> addition ou somme logique (Ou encore :  $X = a \vee b$  désignant la jonction a ou b (ou les deux))

Nous l'écrivons 'a ou b'.

- Table de vérité :

b	a	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



- Propriétés particulières

$$-1 = 1$$

$$a \cdot G = a$$

$$- =$$

$$- a = I$$

- Symbolisation :

$$X$$

$$I$$

- Forme canonique

$$' = 47 + b$$

d. Fonction ET (AND)

Cette fonction est obtenue avec deux variables  $a$  et  $b$ . On prend la valeur 1 si les deux variables sont à 1. Nous écrivons  $X = a \cdot b$  (Ou encore  $X = a \wedge b \Rightarrow$  fonction et b).

Nous écrivons  $X$  en fonction de  $a$  et  $b$ .

- Table de vérité

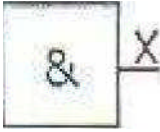
b	a	X
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Propriétés particulières

$$EL =$$

$$a \cdot 0 = 0$$

$$a \cdot a = a$$

- Simplification
- **TH a** 

Norme canonique

$$X = a \cdot b$$

#### 4, Règles de simplification d'une fonction logique

##### a. Commutativité:

- Commutativité logique :  $X = a + b = b + a$
- Produit logique :  $X = a \cdot b = b \cdot a$

##### b. Associativité

- Somme logique :  $X = a + (b + c) = (a + b) + c$
- Produit :  $X = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

##### e. Distributivité

- Produit logique :  $X = a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- Somme logique :  $X = a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

##### d. Autres règles de simplification

Théorème de MORGAN,

Théorème de MORGAN, s'exprime par les deux relations

$$\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$$

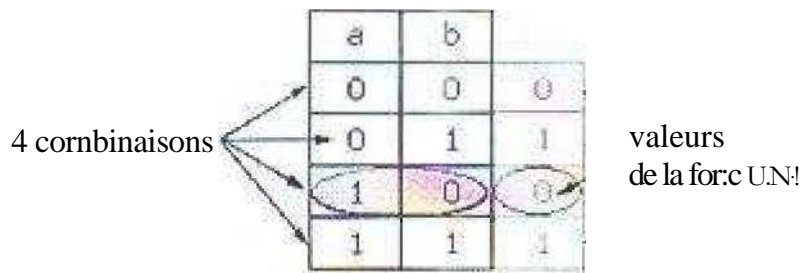
$$\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$$

#### 6, Table de Karnaugh

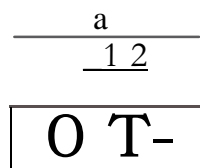
##### a. Principe

Nous avons vu que les règles de l'algèbre de Boole permettent de simplifier les fonctions, cette méthode est cependant relativement lourde et ne permet jamais de savoir si on a obtenu une expression minimale de la fonction ou pas.

Nous pouvons utiliser la méthode du tableau de Karnaugh. Dans le cas de deux variables binaires, nous avons toutes les possibilités (ou combinaisons) à évaluer que nous traduisons sous la forme de la table de vérité suivante



À chaque combinaison des variables est associée une valeur de la fonction. L'idée de la table de vérité est d'associer une valeur à chaque combinaison des variables, en adoptant la représentation suivante



Nous disposons donc de 4 cases correspondant aux 4 combinaisons de variables.

La case 1 correspond à la combinaison  $a = 0$   $b = 0$

La case 2 correspond à la combinaison  $a = 1$   $b = 0 \Rightarrow (a, b)$

La case 3 correspond à la combinaison  $a = 0$   $b = 1 \Rightarrow (a, b)$

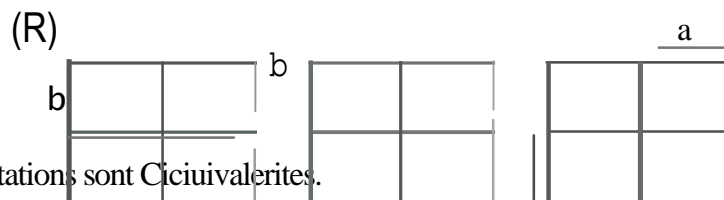
La case 4 correspond à la combinaison  $a = 1$   $b = 1 (a, b)$

Dans chacune de ces cases sera inscrite la valeur de la fonction pour la combinaison de variables correspondant à cette case, En suivant l'exemple de la table représentée ci-dessus nous avons :

case n° 2  $\Rightarrow$  combinaison de variables  $a = 1$  et  $b = 0 \Rightarrow$  valeur de la fonction = 0.

ty. Représentation d'un tableau de Karnaugh

Un tableau de Karnaugh peut se représenter sous les formes suivantes ;



Ces trois représentations sont équivalentes.

Un tableau de Karnaugh nous renseignera sur les données suivantes

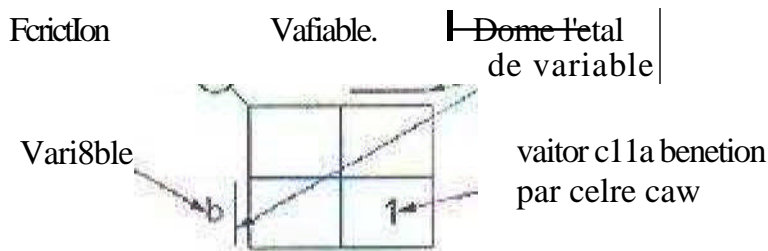
**4. Le nom de la fonction (par ex X)**

- Le nom des variables  $b$   
des variables  $0_1$  ou **une** barre représentant  $Taal$  1
- La valeur de [a fonction] (1 ou G)

notons que

- Dans la case 1 les variables valent 1: Pates O.

Si l'on adopte la notation algébrique booléenne pour les variables, et le nous renseigné  
num v. de l'état de la variable (a ; TO,



**c. Tableau de Karnaugh à 3 variables :**

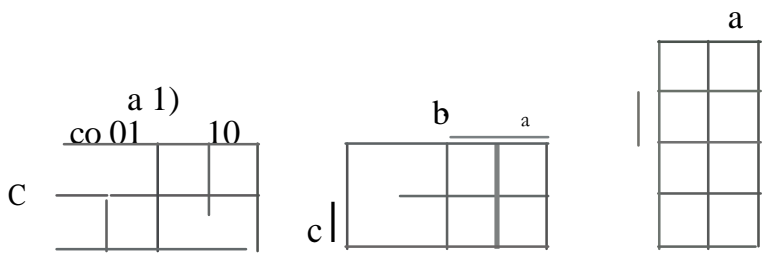
A chaque case est associé un triplet de valeurs  $c_1$

Exemple casé : l'17 I représente le triplet  $\{0,0,0\}$  ou  $a=0, b=0$  et  $c=$

Nous pouvons dire que la case correspond au produit  $c$

Dans ce cas la représentation devient

**Tableau de Karnaugh à 1 variable**



A chaque case est associé un quadruplet des valeurs  $a, b, c, d$ .

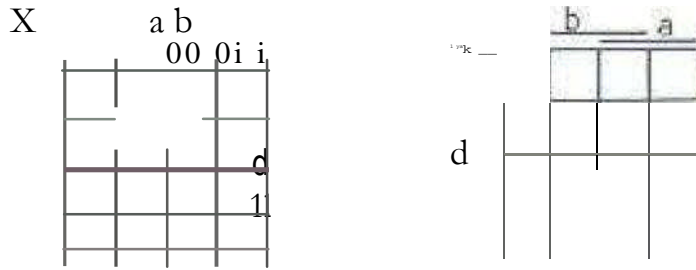
Exemples

La case 14 représentera le quadruplet  $\{1,0,0,0\}$  ( $a=1, b=0, c=0$  et  $d=0$ ) ( $a \cdot b \cdot c \cdot d$ ),

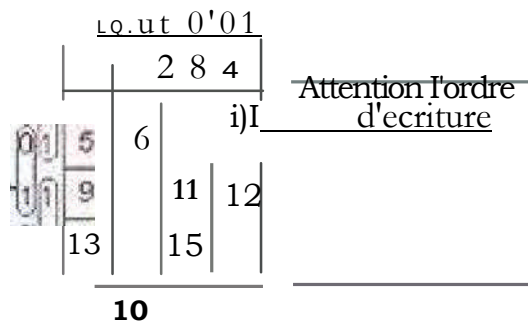
La case 11 représentera le quadruplet  $\{1,1,1,1\}$  ou  $a=1, b=1, c=1$  et  $d=1$  ( $a \cdot b \cdot c \cdot d$ ),

La case 16 représentera le quadruplet  $\{0,1,0,1\}$  ( $a=0, b=1, c=0$  et  $d=1$ ) ( $\bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} \cdot d$ ).

10



Dans chaque cas, l'ordre de lecture des états des variables fait qu'entre deux cases voisines (en ligne ou en colonne) une seule variable change d'état, on dit de telles cases qu'elles sont adjacentes.



Changement de DJ \_\_\_\_\_

MIXAGE de C d  
Changement de \_\_\_\_\_ 1

La case 2 correspond à a = 1, b = 1, c = 0, d = 0  
La case 8 correspond à a = 1, b = 0, c = 0, d = 0

Lorsque nous passons de 2 à 3, la variable "a" change d'état : 2 et 3 sont adjacentes.  
Lorsque nous passons de 2 à 1, la variable "b" change d'état : 2 et 1 sont adjacentes.  
Lorsque nous passons de 2 à 6, seule la variable "d" change d'état : 2 et 6 sont adjacentes.  
Enfin, lorsque nous passons de 2 à 14, seule la variable "c" change d'état : 2 et 14 sont adjacentes.

Nous venons de déterminer les adjacences de la case 2.

c. Vérifiez dans le tableau de KARNAUGH

Supposons qu'on ait construit la table de vérité suivante

a	b	c	d
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1		•

0	i		
1			
1	<b>0</b>		0
<b>1</b>	<b>1</b>	<b>c</b>	<b>0</b>
<b>i</b>	<b>1</b>	I	0

OFTPT/DIZIF:

**Le dispositif Z**

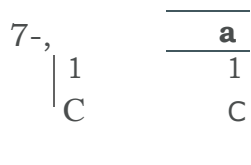
si  $a, b, c$  sont simultanément 0 (fonction ET  $\Rightarrow a = b = c = 0$ )  
 OU si  $a = 1, b = 1, c = 1$  simultanément (fonction OR  $\Rightarrow a = b = c = 1$ )  
 OÙ si  $a = 1, b = 0, c = 0$  simultanément (fonction  $\Rightarrow a = 1, b = 0, c = 0$ )

Ce (p.m nous traduisons la requête)

$$5.1) a + b + c$$

Dans le tableau de Karnaugh, nous mettrons "1" dans chacune des 3 cases correspondant aux combinaisons  $abc$  et  $abc$

Notamment placerons un "0" dans les cases **correspondant aux autres termes.**



Il est important de reconnaître que la table de vérité, la logique algébrique, la fonction et le tableau de Karnaugh sont des formes équivalentes de la même information.

**f. Représentation du tableau de Karnaugh**

Soft à transcrire l'union logique suivante

$$a + b + c$$

Nous devons remplir un "1" dans toutes les cases qui vérifient chaque terme de l'équation  $X = a + b + c$

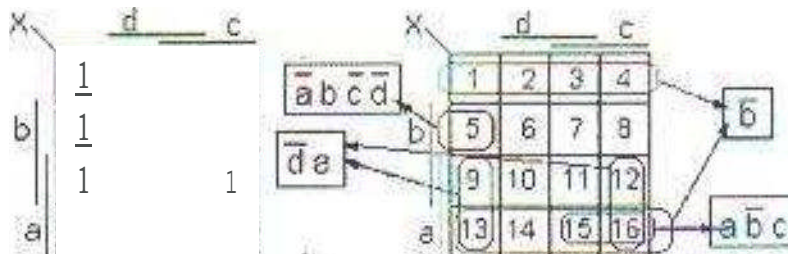
Le résultat est dans les cases 5 et 16 (en rouge)

Le

terme est ; Tali dans les cases 13 et 16 (en Vert)

Le résultat est vrai dans les cases 5 (et noir)

Le résultat est vrai dans les cases 13, 14, 15 et 16 (en vert)



Dans la pratique nous remplissons une seule fois le tableau de Karnaugh.

No polynomial lab

---

**POEPPT/DRIF**

---

|



**Quand un terme ne contient** qu'une variable il occupe une zone de 8 cases  
 Quand un terme est un produit de 2 variables il occupe une zone de 4 cases  
 Quand un terme est un produit de 3 variables il occupe une **zone de 2** cases  
 Quand un terme est un produit de 4 variables il occupe une **zone de 1** case

c



**La lecture d'une fonction dans un tableau de Karnaugh**

**La lecture d'une fonction dans un tableau de Karnaugh** est le problème inverse du paragraphe précédent (voir Ecriture dans un tableau de Karnaugh). **Nous pouvons lire successivement chaque des cases (fonction ET) et les regrouper par des fonctions OU.**

Exemple 1:

c

Dans l'exemple 1 nous voyons que 'V' est égale à a ET b ET c ET d, et nous arrivons

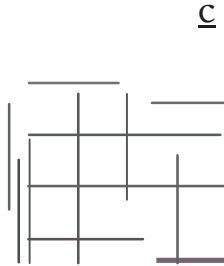
		1	

$$Y = a \cdot b \cdot c \cdot d$$

Dans l'exemple 2 nous voyons que Y est égale à a ET b ET c ET d OU a ET b ET c ET d


h. Re rm de cases dans urn to Aesu de K ru uJi:

Solt le tobleau de la fonotion Y suivante



NoUs pouvons derirc

a

**a.H.E.**

a.E.c..

Hri fait, nous pouvons simp[ifier cztto expression en reniarquant quo

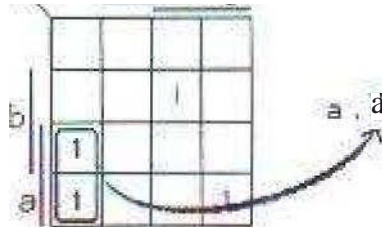
+ a. 1:1' C. **3**

2' Cues deux tonnes correspondent a [2.cias.es](http://2.cias.es) adjezentez (cases 9 et 13).

3' No us surions pu lire directernent duns lo tabtoau de Karnaugh 7

**Y**

Notre expression test maintenant sous la forme



**i. Minimisation dune fonction dins urn tableau de KarnaughY**

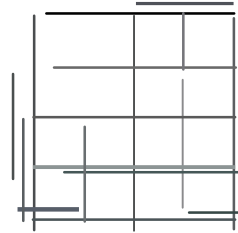
En oat Alumni notie obwrvation nous pouvons reirmuluer -6gaiernent quo la forc7ion vault "I"  
Llatis deux mitres CHS.CS Ldj acenteS, Ce qui nous aurAt conduit a l'cx.Press ion

7

O Ode cle trona cliriglig

**L'INFORMATIQUE**

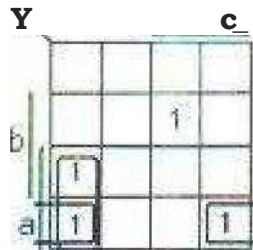
\_1



a, b d

$$; b\_c \quad 1:1 + a \cdot b \cdot F1 + a, b \cdot d$$

Mais rexprt.ssiion la plus simple sera obtenuc en regratipant les cases comme indique:

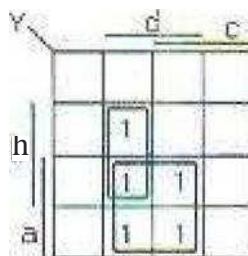


Ce qui correspond a la manipulation algdhrique suivante

$$=.a.b.Z. 3 + a.E. 7.3\# a.; \quad a, \quad +$$

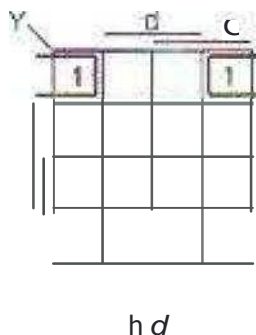
$$a,La \quad a \cdot E \cdot d \quad + 3 \cdot Inc,d$$

Cc qui donne rexpression la plus simple clue ron puisse obtenii. Nous awns minimiser l'6quation de la fonction Y. En regroupani los oases adjaocerles par deux, on supprime une tirianabl des errrws correspolidams ; une manipulation a lObrique simple noonLre que pour supprimer deux variables, it faut disposer de 4 C4ISCs adjacentes, pour en supprimer 3 it fait S. cases adjacentms,



$$\hat{Y} = a \cdot d + b \cdot c \cdot d$$

.4 afire :



**j. Ri mate :**

La inf.,liodc de lecture des fonctions dans un tableau de Karnaugh consiste done a regrouper les eases adjacentes par 2", n 6tant le plus Brand possible. On essaie do regrouper touter les casts c.ette rna.ni6re, les elieva.uchements dc groupes itan1 perm is.

Unc one de eases Min ira une variable.

Une zone de 4 cases ddfinira un prod uil de variables.

Unc zone du 2 eases dainita uix produit de 3 variables.

line zone dl cases definira un produit dc 4 variables,

On lit enlin la foliation, en ne.consenant pour chatue association que les variables qui ne uharigent pas dl6tat.

**k, jaartieulier**

H arrive paifois qu'une fonction so4 itviarnnitt a pour certaines combinaisons deS variables, pour ditTerentes raisons ; la plus courante est queL...ertaines oonibinaison.s des variables etant impossibles, on ne juge pas utile de donner une valeur partielihe A la fonction pour cues cembinaison IA. Dans les cases. correspondantes du tableau de. Karnaugh, on pluera un sign, p a r t i c u l i e r ( 4 1 ) , Lors du repoupeement des Cas5 nous transformons le djen 0 ou en I suivant la convenanee, suivant Je,s simplifications qui pcutent en d6couler.

	0	1	0
c	1*	if	1D

On obLicnt iii rexpession la plus simple de F Gn iransfOrmant ie ode la case 6 en "1" , ce qui pert net de regrouper les oases 5, 6, 7, A et en transformant lcrdc la case 7. en '0'.

$$N0113; \text{tiff}OPIS a'inte : Z = c$$

C. l'unité de mesure de l'information et ses multiples

Unités de mesure en informatique désignant la quantité d'information représentée par un chiffre du système binaire. On en fait référence à John W. Tukey et la popularisation Claude Shannon.

Dans le cadre de la théorie de l'information proposée par Shannon, lorsque l'on considère l'information correspondant à la chance de gagner ou de perdre un match de football, quand l'arbitre indique que pile ou face est tirée, on donne un bit d'information aux deux équipes en compétition.

Très souvent, les multiples du bit sont les puissances de 2. On cite :

- 1 octet (byte en anglais) = 8 bits
- 1 Kilo-octet (Kb) = 1024 octets
- 1 Mégaoctet (Mb) = 1024 Kb = 1024 \* 1024 bits
- 1 Gigaoctet (Gb) = 1024 Mb = 1024 \* 1024 \* 1024 bits

D. Les différents codes binaires

1. Définitions

Le collage est un procédé qui transforme une information (écriture, vitesse...) en écriture binaire dans un code de choix.

Un code est un ensemble de caractères numériques ou mots. Un mot est un ensemble de caractères numériques. Le traitement est le passage d'un code à un autre.

Code binaire pur

Ce code correspond au système de numérotation binaire et fait référence au code binaire naturel. Les caractères sont des bits, les mots sont formés par une association ou combinaison de bits et avec  $n$  bits nous pouvons former au maximum  $2^n$  mots,

3. Code binaire réfléchi ou code Gray

Le code Gray est un code construit de façon telle que chaque nombre consécutif diffère du précédent immédiatement d'un seul bit, exprimant autrement dit qu'un seul bit change à la fois. Le nombre de bits augmente d'une unité. De plus, on opère de telle manière que le bit de transformation soit le bit de poids faible. Si une erreur survient lors d'une transformation d'un nombre  $n$  bits, elle affecte au plus un seul bit.

Construction du code Gray

Construisons par un exemple simple le code Gray pour les 4 premiers chiffres décimaux. Les bits suivants suffisent et les combinaisons en binaire (DCI) sont les suivantes



E Le den.ombrement

I.7.443141mi faztorielle et proprietes

En math6matiques, la factorielle (un either nature] n. not6e n!, C.c. qui se lit soft < factorielle de n >5 suit 14torielle n r), cst fe produit des nombres entiers strictement positifs inferieurs ou6gaux n.

La faulorielle joue tin riSio important en algebre combinatoirec pewee y a n! .fawns differentcs de permuter n objets, Rile apparait dabs de nombreuses formule,s en matl6matiques, comme par exemple la formule du binome et la formule de Taylor\_

a. DOini Lion

Soit p1 un naturel. Sa facthriel le est formelleincni4,16.tinie par :

$$1=1$$

Prpr CX.6111,Me :

- $1! = 1$
- $2! = 1 \cdot 2 = 2$
- $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$
- $10! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 362880$

Par convention  $0! = 1$

L demition de la faetorielle sous forme do produit rend naturelle cotte convention puisque 0! est un produit vide,c'est-.5.-dire roduil a relement ucutre do la multiplication.

h. ProprietOs :

La notion de la factorielle jouie d toutes lcs propria.6,S de la mulaplicz=ion usuelle (di distributivit6, ocyrritrativitiM,,). En plus, la factorielle obeit AUX deux lois suivarnes

- $n! = n \cdot (n-1)!$
- $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

2. Arrangements de r objets parmi n

En maiheinatiques, lorsque nous choisissons k' objets panni n objets discernables et que l'ordre clans lr pe!. les objets sont s6lectionne4 reret une importance, nous pouvons lcs rupresenter par un k-uplet e meats distincti:

A un examen, cinq candidats tirent les uns après les autres un sujet dans une urne contenant 50 questions toutes différentes. Le premier tirage se fait sur un ensemble de 50 questions possibles, à chaque tirage suivant, la question qui vient d'être tirée est enlevée de l'urne. Ainsi, si on tirait 5 élèves, le tirage se ferait sur 50, puis sur 49, et ainsi de suite jusqu'à 46 qui représente l'ensemble des questions restantes dans l'urne pour le dernier tirage. L'arrangement va consister à additionner à chaque modification de cet ensemble de départ la nouvelle probabilité de piger une question donnée — La solution pour cet exemple est donc un arrangement de 5 (k).a. 50 (n). Si on remettait la question tirée de nouveau dans l'urne à chaque tirage, il s'agirait d'une combinaison,

a. flannition

Soient E un ensemble fini de cardinal n et k un entier naturel. Un k-arrangement sans répétition de E est une application injective de  $\{1, 2, \dots, k\}$  dans E.

h. Autre definition

Soient E, un ensemble fini de cardinal n et k un entier naturel]. Un k-arrangement de E, ou encore arrangement sans répétition de n éléments pris k à k) est un k-uplet  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  d'éléments de E tel que  $a_i \neq a_j$  pour  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  avec  $i \neq j$ . Un tel k-uplet est aussi appelé k-liste distincte d'éléments de E,

e. Tb6nreme :

Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et k. L'ensemble  $\left( \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right)$  des applications injectives de F dans E est fini et son cardinal est égal  $n(n-1)\dots(n-k+1)$ . Si k = n et si n = k, le cardinal se note n! et se lit n factorial dit aussi qu'on a un arrangement de k A n.

Construire un arrangement revient à placer les uns après les autres, k objets discernables **pris parmi** dans k cases numérotées et donc toute permutation de n éléments est un n-arrangement de n éléments. La notion d'arrangement généralise donc celle de permutation,

3. Combinaisons de r objets parmi n

a. Definition :

Une combinaison de r objets parmi n objets différents est un sous-ensemble non ordonné de r objets choisis parmi les n objets. On a la formule

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$



F La probabilité:

### I. Introduction

Le calcul des probabilités s'occupe de phénomènes aléatoires (dits plus esthétiquement: "processus stochastiques"), c'est-à-dire de phénomènes qui ne mènent pas toujours à [la même] issue et qui peuvent être étudiés grâce à des lois connues et apparitions. Néanmoins, si ces phénomènes ont des issues variées, et pendant du hasard, observerons cependant que certains phénomènes statistiques. Le jet d'un dé, le tirage d'une carte pourrait être analysé par les lois de la mécanique, mais ce serait trop compliqué. Il est impossible car il faudrait parfaitement connaître les conditions initiales ce qui **comme vous** pouvez le voir dans la physique. **quantité: prend un lot de 1000 de façon** impossible,

L'axiomatisation par le calcul des probabilités a alors été inventée par A.N. Kolmogorov dans son livre paru en 1933. Ce modèle [s'agit] de 16 axiomes (J, A, P) que nous dérivons de manière simplifiée et plus pratique d'ailleurs. **Le chapitre traitant de la théorie de la mesure** (voir l'annexe d'algèbre).

#### Remarque

**Une grande** partie du contenu de ce chapitre est irrévérencieuse et trop technique. Nous faisons cependant tous les efforts possibles pour essayer de rendre digeste et agréable la branche qui pose souvent problème. Or, il n'y a pas de meilleure manière **qu'il soit** facile pour nous de rendre de grandes difficultés. Effectivement nous aimerions vous passer d'exemples et d'exercices et de faire tout cela parfaitement compréhensible et clair mais cela est difficile car il nous faut trouver un langage d'abord écrit; brandissant des mathématiques. Nous vous remercions *donc* pour votre compréhension si certaines choses ne sont pas claires.

## 2, UNIVERS DES EVENEMENTS

### a. Définitions

D1, L'univers des événements (l'ensemble des "observables" aussi) est l'ensemble  $\Omega$  [c'est] l'ensemble des issues (résultats) possibles qui se présentent à l'épreuve aléatoire déterminée,

D2. Soit  $\omega$  un événement. Alors, nous disons que  $\omega$  est réalisé (on "scrit") si lors du déroulement de l'épreuve se présente l'événement  $\omega$ . (on "scrit"  $\omega$  si lors du déroulement de l'épreuve se présente l'événement  $\omega$ ).  
le contraire, nous disons que  $\omega$  n'est pas réalisé.

D3, Le sous-ensemble vide  $\emptyset$  de  $\Omega$  s'appelle "événement impossible". L'effet, si lors de l'épreuve se présente, nous axons toujours  $0 \leq P(\emptyset) \leq 1$  et donc l'événement est impossible. Oubliez donc jamais lieu.

D4. Le sous-ensemble A de  $\Omega$  s'appelle "événement certain", En effet, si lors de l'épreuve l'issue  $\omega$  se présente, nous aurons toujours  $\omega \in A$  (car  $\Omega$  est l'univers des événements);  
nécessairement  $\mathbb{P}(A) = 1$ .

**D5. Exemple** A et B deux sous-ensembles de  $\Omega$ . Nous savons que l'événement A est disjoint de B si et seulement si  $A \cap B = \emptyset$ .

Si deux événements A et B sont tels que

$$A \cap B = \emptyset$$

Les deux événements ne peuvent pas être réalisés pendant la même épreuve (résultat de lancer d'un dé équilibré), nous disons qu'ils sont "événements incompatibles";<sup>11</sup>,

Sinon, si

$$A \cap B \neq \emptyset$$

Les deux événements peuvent être réalisés dans la même épreuve (possibilité de voir un chat noir **à un moment**, on passe sous un pont par exemple). nous pouvons inverser les rôles des "événements indépendants" (nous y reviendrons plus en détail dans l'étude des axiomes des probabilités).

### b. AXIOMES

La probabilité d'un événement sera en quelque sorte le pendant de la notion de fréquence d'un phénomène aléatoire, en d'autres termes, chaque événement nous allons associer un nombre réel, appartenant à l'intervalle  $[0;1]$ , qui mesurera sa probabilité (chance) de se réaliser. Les propriétés des fréquences que nous pouvons mettre en évidence lors d'épreuves diverses nous permettent de fixer les axiomes des probabilités.

Attention! La théorie des probabilités représente un cadre théorique dans lequel nous allons pouvoir modéliser le domaine de l'incertain. Comme dans toute formalisation, existe une part de schématisation de la réalité, qui implique que les résultats obtenus ne seront valides que dans la mesure où cette représentation abstraite et simplifiée de la réalité n'est pas trop éloignée de la réalité.

Soit  $\Omega$  un univers. Nous disons que nous définissons une probabilité sur les événements de  $\Omega$  si à tout événement A de  $\Omega$  nous associons un nombre  $P(A)$ , appelé "probabilité a priori de l'événement A" ou "probabilité marginale de A", satisfaisant aux quatre axiomes suivants

AL Pour tout événement

$$P(A) \geq 0$$

Alors, La probabilité de tout événement est un nombre positif ou nul (supérieur ou égal à zéro) et inférieur ou égal à 1.

**A2, Loi de probabilité de deux événements incompatibles**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

A3, si A et B sont incompatibles, alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

La probabilité de la réunion ("ou") de deux événements incompatibles est égale à la somme de leurs probabilités (loi d'addition.). Nous parlons alors de "probabilité disjointe" la notation

Autrement dit sous forme plus générale si  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une suite d'événements deux à deux incompatibles, on a

$$P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(A_i)$$

(Incidence de l'addition des probabilités);  $P(\bar{A})$  est la relation entre les probabilités d'un événement A et de son complémentaire, note  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

A4. Si A et B sont indépendants (ou mutuellement exclusifs), nous avons

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

La probabilité de l'intersection ("et") de deux événements indépendants est égale au produit de leurs probabilités (loi de multiplication). Nous parlons alors de "probabilité conjointe" de la notation  $P(A, B)$ .

Autrement dit sous forme plus générale si  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  sont indépendants, on a

$$P\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \prod_{i \in \mathbb{N}} P(A_i)$$

Attention il ne faut pas confondre "indépendants" et "incompatibles". Deux événements indépendants de probabilités non nulles ne sont jamais incompatibles. Si l'un des deux se produit, l'autre ne peut pas se produire.





S2. Soit nous calculons  $P(\cdot | A)$

A partir de la probabilité  $P$  initiale. Nous allons choisir la deuxième solution. Soit:  $B \subset A$ . En utilisant l'argument "région C est trois", nous pressentons que  $P(B | A)$  doit être proportionnel à  $P(B \cap A)$  la constante de proportionnalité est déterminée par la normalisation '41 **1**

Soit maintenant  $X \in \Omega$  (est inclus dans le complémentaire de  $A$ ). Il est assez intuitif que  $P(X | A) = 0$ . Ceci nous mène aux définitions suivantes :

$$P(B | A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \quad \text{et} \quad P(B | \bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})}$$

Le nombre  $P(B | A)$  s'appelle "probabilité conditionnelle de B sachant A".

### Interprétation

La connaissance d'une information sur une expérience peut modifier l'idée que nous faisons de la probabilité d'un événement. Ainsi, le fait de savoir que 8 est réalisé réduit l'ensemble des résultats possibles de  $\Omega$  à  $B$ . A partir de là, les éventualités de  $A \cap B$  ont une importance, la probabilité de A sachant B doit donc être proportionnelle au coefficient de proportionnalité  $1/P(B)$  assure l'application qui à A associe  $P(A | B)$  est bien une probabilité, pour laquelle B est évenement certain.

### Remarque

Attention [la notation  $P(A | B)$  est (Blaine peut être) dangereuse. First effect,  $B \cap A$  n'est pas un événement (ni une division par zéro...).

Une loi de probabilité conditionnelle est une loi de probabilité. En particulier,  $P(\cdot | A)$  et  $P(\cdot | B)$  sont disjointes (incompatibles) et réal [se parmi les expériences de B est aussi. Alors ;

$$P(A \cap B | C) = P(A | C)P(B | C)$$

Aussi

$$P(\cdot | \bar{A}) = 1 - P(\cdot | A)$$

La définition des probabilités conditionnelles **Souvent sous la forme**

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{et} \quad P(A) = P(A | B)P(B) + P(A | \bar{B})P(\bar{B})$$

Soit



**F i t**

in A1) Even j1r2 :

Supposons une **maladie** comme la meningite. La probabilité de l'avoir sera notée  $P(A)$  (chiffre arbitraire pour exemple) et un signe de contact avec la maladie comme le mal

tête qui sera noté  $P(B|A) = \text{Sup sores connu la probabilité d'avoir mal à la tête} [ \mathbf{DOLIS}$  avons une meningite  $P(B) = 0.01$ . Le théorème de Bayes donne alors la probabilité d'avoir une Li-561E110e si **11.01.45** aions mal à la tête!

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad p. 09$$

Maintenant, notons que nous avons aussi :

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})$$

$$= P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})$$

qui est la "formule des probabilités totales" ou encore "théorie des probabilités totales". Mais aussi, pour l'instant, nous traitons ;

$$P(A) = \sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)$$

Il faut savoir que les implications de ce théorème sont évidentes dans le quotidien. Dans la médecine, dans l'industrie et dans le domaine du Data Mining.

Ainsi, pour résumer simplement, si A et B sont deux événements, le théorème de Bayes permet de déterminer la probabilité  $P(A|B)$  si nous connaissons les probabilités de A, B et de  $P(B|A)$ .

G. R: solide des problèmes de probabilité et de

Notion de variable qualitative,

Se dit, en statistique, d'une variable pour laquelle la valeur mesurée sur chaque individu (parties qualifiées de catégorique ou de fréquence) ne représente pas **une quantité**. On ne peut alors calculer un total pour un ensemble d'individus. Les variables qualitatives s'opposent aux variables quantitatives.

On distingue le cas part culer des variables ordinales qui sont des variables qualitatives numériques, Exemple de l'application des clients pour un produit, qu'on peut noter de -2 (très mauvais) à +2 (excellent), en passant par zéro (indifférent),

## 2. Notion de variables quantitatives.

Soit, en statistique, d'une variable pour laquelle la valeur mesure le rang d'un individu représenté par une quantité. On peut alors calculer le total pour un ensemble d'individus. Exemple du poids :

pour un ensemble d'individus. Si plusieurs individus montent sur une balance, leur masse est la somme de leurs masses

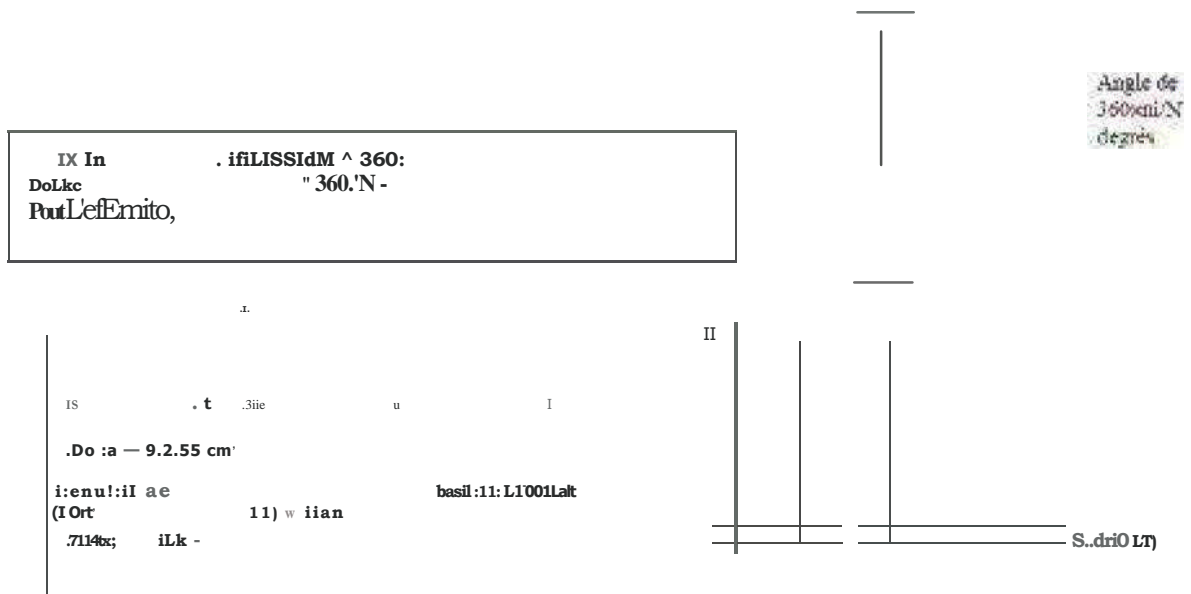
Contre exemple de la variable étage dans un ensemble de logements. Cette variable est mesurée par un nombre, n'est pas une quantité, on ne peut pas faire un total avec les étages de plusieurs logements. Par contre, la variable "pièces" des logements est quantitative.

Les variables quantitatives s'opposent aux variables qualitatives, pour lesquelles le calcul d'un total associé à plusieurs individus à partir de leurs valeurs individuelles ne peut pas résulter d'une opération mathématique.

## 3. Représentation des variables qualitatives et quantitatives.

Deux représentations graphiques sont adaptées aux variables qualitatives : la représentation en barres et celle en secteurs circulaires

- Une barre d'orgue... représente pour chaque modalité un barreau dont la hauteur est proportionnelle à l'effectif (ou la fréquence) correspondant.
- Les secteurs circulaires de chaque modalité sont représentés par un secteur circulaire d'angle proportionnel à l'effectif correspondant.
- Histogramme des fréquences : une correspondance d'aire est établie avec la modalité.





#### 4\_ Calcul des paramètres de tendance\_

Il s'agit de trouver des valeurs permettant de synthétiser l'information contenue dans une série statistique quantitative.

##### a. Paramètre de tendance centrale :

- **La moyenne**

Elle se calcule comme suit :

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

- **La médiane**

**La médiane**  $Me$  est la valeur qui sépare la Population en deux parties. Pour 50% des individus la valeur de la variable est supérieure à  $Me$  et pour 50% elle est inférieure à  $Me$ .

##### Paramètres de dispersion

Un paramètre de tendance centrale ne peut pas être un bon résumé statistique. La moyenne ne permet pas de distinguer une distribution de notre tableau. Les étudiants auraient 10.20 (une distribution où les étudiants auraient pour moitié 0.10 et 20/20 de deux Gas la moyenne est la même mais la dispersion des notes au cours de cette dernière diffère d'un coefficient.

- L'écart **type** ,

L'écart-type, noté  $s$ , est la racine carrée de la variance,  $s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ .  
Il mesure la dispersion des données.

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Les quartiles :

Les quartiles,  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  divisent l'effectif de la série statistique préalablement ordonnée par ordre croissant en quatre parties égales. On s'aperçoit que le deuxième quartile est la médiane. Le principe du calcul des premiers et troisièmes quartiles est identique à celui de la médiane.  $Q_1$  est associé à 25% et  $Q_3$  à 75%.

\* Le coeffl\_Acient die correlation

quantifie la correlation lineaire. On le note geuiralement  $r(X, Y)$  ou plus simple: Tient  $r_{XY}$ . Ce coefficient est egale a :

$$r(X; Y) = \frac{\text{Cov}(X; Y)}{s(X)s(Y)}$$

$\text{Cov}(X; Y)$ .est la covariance de X et Y et s'obtient comme suit :

$$\text{Cov}(X; Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

# GUIDE DES TRAVAUX DIRIGES

## r17\*, VAUX DIRIGES

### 4<sup>o</sup> Spseentes tie numerarion

- 1- Repi'6setitr [2153].s clans le sysarne  
(Solution 501)
- 2- Convertir [11 3123], dius le cyst .me d eim al.  
(Solution 85546875)
- 3- Convertir le decimal 626, 4375 dans le cysterne 4 hose 4  
(Solution 21302, 13)  
Convertir le d6citnal 1476 dans le systeme octal.  
(Solution 2704)
- 5- Convertirl'octal [25146] b dans ]e systeme deci mar.  
(Solution 10854)  
C'orrifertir a!) binaite. [as ribminas  
• a. 1430271e  
b. [21, 673J  
(Solution ; 100011000010111, b : 010001, 110111011)
- 7- Converdr en octal  
e/, 11101010110  
b. 1001101.01100001
- 8- Efratruch...s ;Additions suivantes en octal  

6254	36517	465,37
+ 4176	-F64753	- 31,613

  
(Solutions 12452 ; 123472 ; 517,203)
- 9- Evaluer les comp101ents 0. 8 des tiornbres suiv.mils en outal ;  
eI.. 40613  
b, 716520  
c. 335500  
(Solutions ; 37165 ; 061260 ; 442300)
- 10Effectuer chacane des Oustraction.5 suivanLes en metal  
a. 62!4-3527  
4617263 —1423736  
(So1,ution.5 ; 2465 ; 3173324)
- 11- Comertir en hexadkirna1 cl6oimal X = 15 321
- 12- Transforracrliticxadecitnal 1A74 en sa dki 0.1 ate
- 13- Convertir en binaire les bexade.cimanx  
3D59  
b. 27, ,A 3C`
- 14- Convcrtir c.n hexadecimal les binaixes  
a. 10110100101110  
b. 11100: 10110110n
- 15-EfFctAier  
a.. 8205 + 9D85  
b. 83A7F4 F D5B63  
C. 4C, 3E. — 2, 5D8
- 1.6-Cial.cular las Qca'npfluints, a 1.6 de  
a. 74B9.

5031'g  
 c. 2A7600  
 17- Effectner  
 a 74364 - 42AF  
 9C41)fi1 9 - T3C0482

**OF•PTYDRIF**

1.	Citer 2 exemples d'appareils fonctionnant principalement de manière analogique	
<b>Reponse(s) : Thermomètre au mercure. compteur à vitesse (à aiguille), montre à quartz</b>		
2.	Citer 2 exemples d'appareils fonctionnant principalement de manière numérique	
<b>Reponse(s) : Ordinateur. calculatrice</b>		
3.	Quels seraient les symboles d'un système numérique en base 14 ?	
<b>Reponse(s) : 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D</b>		
4.	Quels seraient les symboles d'un système numérique en base 12 ?	
<b>Reponse(s) : 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B</b>		
5.	Montrer, à l'aide d'une fiche, le LSB du nombre binaire suivant :	
	10111001	
<b>Reponse(s) : 10111001</b>		
6.	Montrer, à l'aide d'une fiche, le LSB du nombre binaire suivant :	
	10111'001	
<b>Reponse(s) : 10171001</b>		
7.	() signifie LSB ? (en anglais et en français)	
<b>Reponse(s) : Least Significant Bit; bit de poids faible</b>		
8.	() signifie MSB ? (en anglais et en français)	
<b>Reponse(s) : Most Significant Bit; bit de poids fort</b>		
9.	Compléter la phrase : La conversion numérique d'un signal analogique en numérique se fait de manière que la représentation analogique évolue de façon	